Еволуција на разбирањето на концептот за бесконечноста

Седми семинар „Математика и примени“, 15 март 2024
Институт за математика, Природно-математички факултет,
Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје

Даниела Стојческа, Ана Софрониевска
Ментор: Катерина Хаџи – Велкова Санева
Факултет за електротехника и информациски технологии, УКИМ, Скопје

За што ќе зборуваме:

ИСТОРИСКА ПЕРСПЕКТИВА	Историската позадина од антички филозофи до современи математичари
БЕСКОНЕЧНОСТ ВО ПОВЕЌЕ ГОЛЕМИНИ	Споредба со метод на бијекција
КАРДИНАЛНОСТ	Кардиналност и алеф броеви. Дали постојат меѓубесконечности?
ХИЛБЕРТОВ ХОТЕЛ	Изненадувачки последици од експериментот
ИЛУЗИЈА НА БЕСКОНЕЧНОСТ	Хипервебстер, Библиотека на Вавилон, Фрактали
ЗАКЛУЧОЦИ ОД АНАЛИЗАТА	Заклучни мисли за парадоксите поттикнати од бесконечноста

1

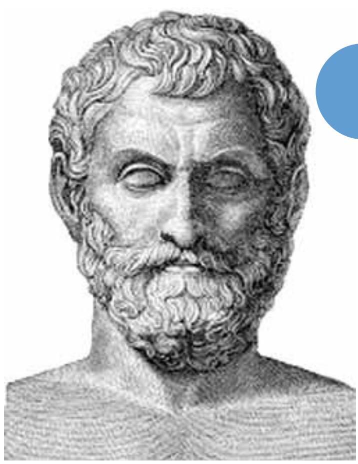
Историска перспектива

Како бесконечноста станала причина за појава на парадокси

Античка Грција

Први обиди за објаснување
на бесконечноста

„Бесконечноста е основачкиот принцип на реалноста. Од него се раѓаат бесконечен број светови кои го исполнуваат целиот Универзум.“

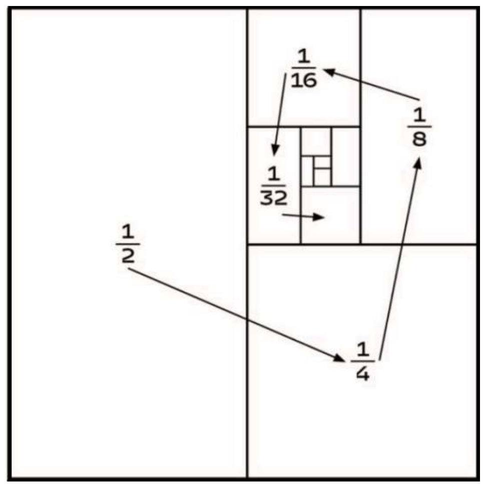


Анаксимандар

Хераклит

„Времето е бесконечно. Секогаш било и ќе биде. Преку бесконечноста го согледуваме сопственото постоење.“

Парадокс на дихотомија

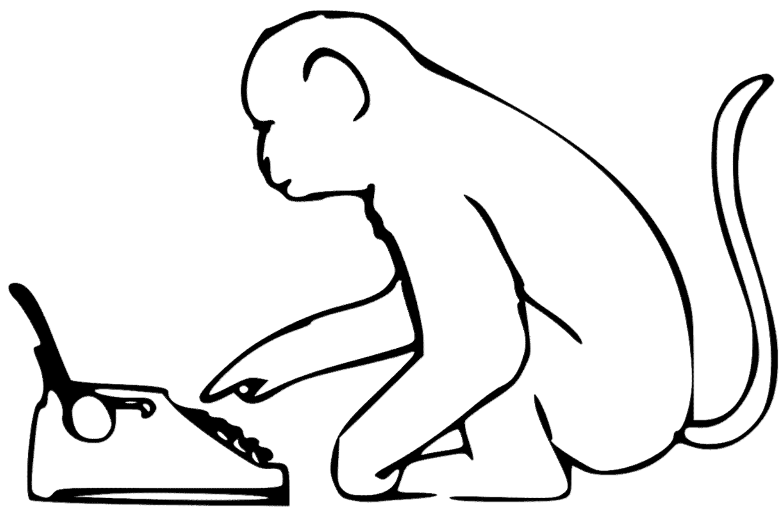


Движењето е невозможно, бидејќи „она што се движи, мора прво да помине половина од патот, пред да стигне до целта“

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

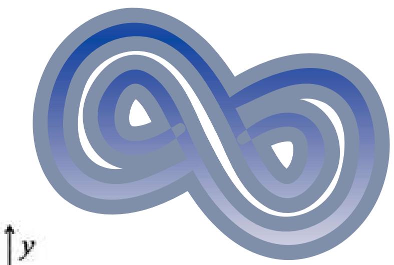
Зенон од Елеја (*450 п.н.е.*)

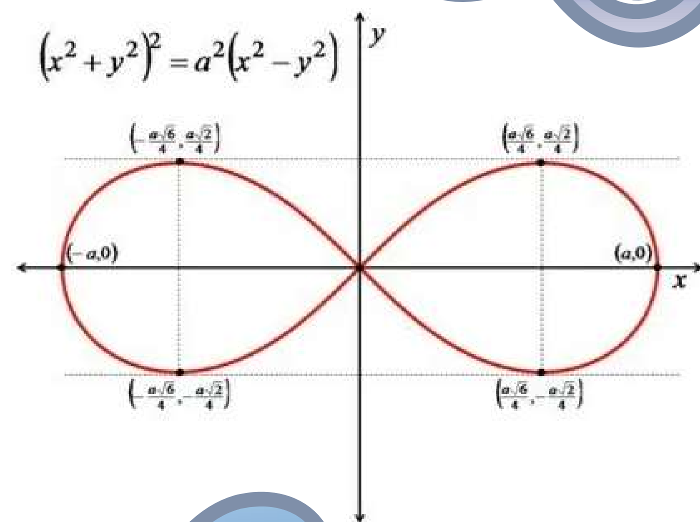
Теорема за мајмунот

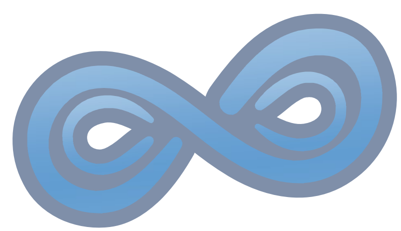


Бесконечноста добива свој симбол т.н. „лемниската“

- Џон Волис 1655 година
- Математичка алатка





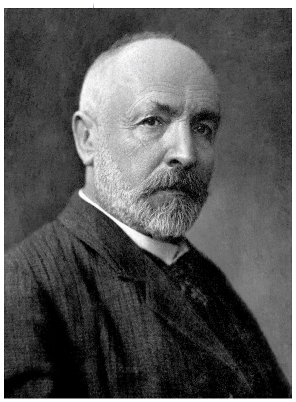


2

Бесконечноста доаѓа во повеќе „големини“

Споредба со метод на бијекција

Дали бројот на сите природни броеви е поголем, помал или еднаков на бројот на сите геометриски точки на права?

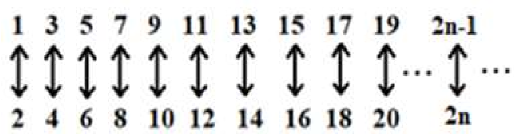


Георг Кантор

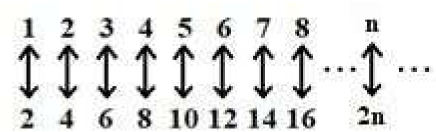
- Основач на аритметиката на бесконечност
- Револуционерен придонес кон математичкото дефинирање на бесконечност

Споредување на бесконечни множества со метод на бијекција

Две множества имаат иста *кардиналност* ако и само ако постои бијекција меѓу елементите на двете множества.



Секој непарен број има свој парен „партнер“



Секој природен број има свој парен „партнер“

Бесконечно преброиви множества.

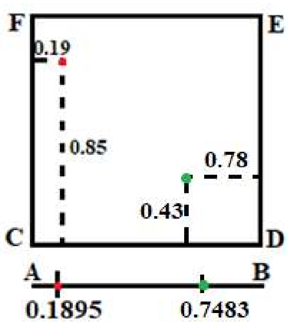
Дијагонален аргумент

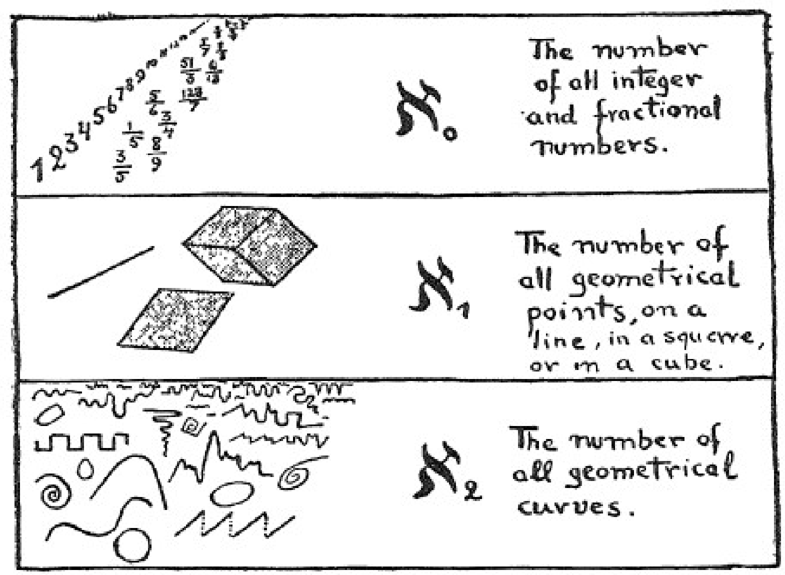
Множеството на реални броеви е бесконечно непреброиво.

$$1 \to r_1 = 0{,}18950\ldots$$
$$2 \to r_2 = 0{,}14159\ldots$$
$$3 \to r_3 = 0{,}11235\ldots$$
$$4 \to r_4 = 0{,}56791\ldots$$
$$\vdots$$
$$n \to r_n = 0{,}87291\ldots$$
$$\vdots$$

Пример за новодобиен број кој го нема во низата
0,2674...

Кардиналност и алеф броеви





Теорема на Кантор-Бернштајн-Шредер =>
Бројот на точки во рамнина е еднаков со бројот на точки на права.

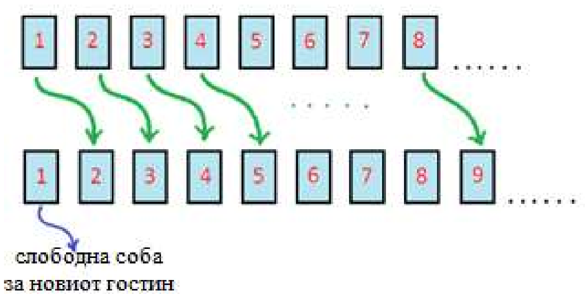
3

Хилбертов хотел

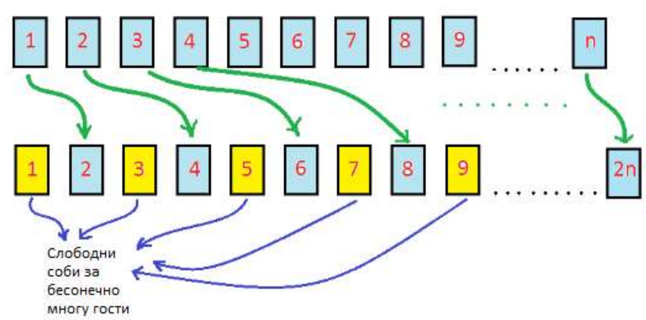
Изнајмување соби во бесконечниот хотел. Изненадувачки последици од експериментот

Традиционален Хилбертов хотел

Прв случај
Конечно многу нови гости



Втор случај
Бесконечно многу нови гости



Трет случај
Бесконечно автобуси со бесконечно гости

Преместување на веќе вселените гости во хотелот

Стар број на соба	Нов број на соба
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
⋮	⋮
n	$2^n = 2^n$

Доделување на соби за автобус 1

Број на седиште	Број на соба
1	$3^1 = 3$
2	$3^2 = 9$
3	$3^3 = 27$
⋮	⋮
n	$3^n = 3^n$

Доделување на соби за автобус 2

Број на седиште	Број на соба
1	$5^1 = 5$
2	$5^2 = 25$
3	$5^3 = 125$
⋮	⋮
n	$5^n = 5^n$

Пресврт во Хилбертовиот хотел

Четврт случај
Проблем со различно чинење на собите

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Пресврт во Хилбертовиот хотел

Петти случај
Новата задача на менаџерот

- Гостите да бидат преместени од соба број n од множеството A_k, $k = 1, 2, 3,\dots$, во соба со број $n + k$.
- Нека $A_k = \{n \mid (k-1)^2 + 1 \leq n \leq k^2\}$. Множествата A_k се дисјунктни и $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \mathbb{N}$.
- Нека $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е дефинирана со $f(n) = n + k$ за $n \in A_k$ и $k = 1, 2, 3,\dots$. (f е добро дефинирана функција и бијекција)

$$f(1) = 2 \to f(1) = 2,$$

$$f(n) = n + 2 \text{ за } 2 \leq n \leq 4 \to f(2) = 4,\ f(3) = 5,\ f(4) = 6,$$

$$f(n) = n + 3 \text{ за } 5 \leq n \leq 9 \to f(5) = 8,\ f(6) = 9,\ \dots.$$

- 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, …} (редни броеви на зафатени соби)
- {1, 3, 7, 13, 21, …} (редни броеви на слободни соби)

Пресврт во Хилбертовиот хотел

Петти случај
Новата задача на менаџерот

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\frac{k}{n(n+k)}$$

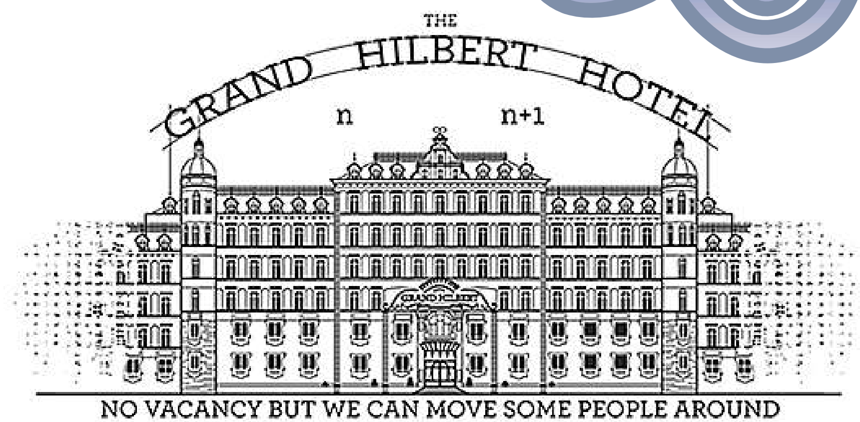
- Ќе покажеме дека овој ред конвергира:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\frac{k}{n(n+k)}\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=(k-1)^2+1}^{k^2}\frac{k}{\left((k-1)^2+1\right)\left((k-1)^2+1+k\right)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)k}{\left((k-1)^2+1\right)\left((k-1)^2+1+k\right)}.$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k-1)k}{\left((k-1)^2+1\right)\left((k-1)^2+1+k\right)}k^2=\lim_{k\to\infty}\frac{2-\frac{1}{k}}{\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{1}{k^2}\right)\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^2+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}\right)}=2.$$

Анализа на резултатите

- Бесконечноста не е ниту број ниту количина
- Потенцијал за појава на парадокси
- Ограничување: преброива бесконечност



4

Илузија на бесконечноста

Хипервебстер, Библиотека на Вавилон и Фрактали. Објаснување на бесконечноста преку низа од зборови и геометриски фигури

Хипервебстер

Најголем речник во универзумот

Библиотеката на Вавилон

Најголемата библиотека во универзумот
https://libraryofbabel.info/

Фрактали

Бесконечно сложени шеми кои се исти во различни размери

5

Заклучоци од анализата

There was a young fellow from Trinity
Who took $\sqrt{\infty}$
But the number of digits
Gave him the fidgets;
He dropped Math and took up Divinity

Ви благодариме на вниманието